آموزشی

حمیدرضا امیری

آموزش ترجمۀ متون ریاضی

اصطلاحات و لغات مهم

1. Prove	اثبات کردن
2. Absolute value	قدرمطلق
3. If and only if	اگر و فقط اگر
4. Calculus	حسابان
5. Equivalence	هم‌ارزی
6. Statement	گزاره
7. Trivially	به‌وضوح، بدیهی
8. Imply	نشان دادن، صدق کردن
9. True	درست
10. Assume	فرض کردن

برای اثبات اینکه یک عدد مساوی با صفر است، لااقل دو روش خاص وجود دارد که در هر دو روش از قدرمطلقِ عدد استفاده می‌شود. (تعریف قدرمطلق را در ابتدای کتاب درسی ملاحظه کنید.)

روش ۱. برای اثبات اینکه $a=0$، می‌توانیم ثابت کنیم: $|a|=0$. (این درست است، زیرا با توجه به تعریف قدرمطلقِ یک عدد، $|a|=0$ اگر و تنها اگر $a=0$.)

روش ۲. فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد. در این صورت $a=0$ اگر و تنها اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon>0$، $|a|<\varepsilon$.

روش دوم معمولاً در حساب دیفرانسیل و آنالیز به‌کار برده می‌شود.

مثال: فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد. در این صورت $|a|=0$ اگر و فقط اگر برای هر عدد حقیقی مانند $\varepsilon>0$، $|a|<\varepsilon$.

اثبات: چون این یک گزارۀ هم‌ارزی است، اثبات شامل دو قسمت است:

قسمت ۱. اگر $|a|=0$، در این صورت برای هر عدد حقیقی مانند $\varepsilon>0$، $|a|<\varepsilon$. این استدلال به‌وضوح درست است. در واقع، اگر $|a|=0$، در این صورت $|a|$ از هر عدد مثبتی کوچک‌تر است.

قسمت ۲. اگر برای هر عدد حقیقی مانند $\varepsilon>0$ داشته باشیم: $|a|<\varepsilon$، در این صورت $|a|=0$.

ما این گزاره را با استفاده از برهان خلف اثبات خواهیم کرد.

فرض کنیم: $|a|\neq 0$، آیا این نشان نمی‌دهد که لااقل یک عدد مثبت چون ε_0 وجود دارد به قسمی که $|a|$ از آن کوچک‌تر نیست؟ $\varepsilon_0=\frac{|a|}{2}$ را در نظر بگیرید، در این صورت $0<\varepsilon_0<|a|$

پس خلاف فرض اولیه درست است و بنابراین گزارۀ اصلی درست است.

There are at least two special ways to prove that a number is equal to zero, and both of them use the absolute value of a number. (See the front material of the book for the definition of absolute value.)

METHOD 1. To prove that $a=0$ we can prove that $|a|=0$. (This is true because by definition of absolute value of a number $|a|=0$ if and only if $a=0$.)

METHOD 2. Let a be a real number. Then $a=0$ if and only if $|a|<\varepsilon$ for every real number $\varepsilon>0$.

The second method is often used in calculus and analysis.

EXAMPLE. Let a be a real number. Then $|a|=0$ if and only if $|a|<\varepsilon$ for every real number $\varepsilon>0$.

Proof. As this is an equivalence statement, the proof has two parts.

Part 1. If $|a|=0$, then $|a|\leq\varepsilon$ for every real number $\varepsilon>0$.

This implication is trivially true. Indeed, if $|a|=0$, then $|a|$ is smaller then any positive number.

Part 2. If $|a|<\varepsilon$ for every real number $\varepsilon>0$, then $|a|=0$.

We will prove this statement by using its contrapositive.

Let us assume that $|a|\neq 0$. Dose this imply that there is at least one positive real number ε_0 such that $|a|$ is not smaller than ε_0? Consider $\varepsilon_0=|a|/2$. Then $0<\varepsilon_0<|a|$.

As the contrapositive of the original statement is true, the original statement is true as well. ■

ترجمه برای دانش‌آموزان

EXERCISES

Prove the following statements.

1. Let x and y be two real numbers. $(x-y)^5+(x-y)^3=0$ if and only if $x=y$.
2. Let x and y be two real numbers. The two sequences. $\{x^n\}_n^\infty=2$ and $\{y^n\}_n^\infty=2$ are equal if and only if $x=y$.
3. Let a, b, and c be three counting numbers. If a divides b, b divides c, and c divides a, then $a=b=c$.
4. Let a, b, and c be three counting numbers. Then $GCD(ac,bc) = cGCD(a,b)$.
5. Let a and b two relatively prime integers. If there exists an m such that $(a/b)^m$ is an integer, then $b=1$.